



**Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo
di istruzione e di formazione**

**QUADERNI SNV
N. 2/2012 –MAT**

**Le prove INVALSI di matematica nella classe quinta della scuola primaria e
nella classe prima della scuola secondaria di primo grado**

Stefania Cotoneschi, Franca Ferri, Ketty Savioli

*Le opinioni espresse nei lavori sono attribuibili esclusivamente agli autori e non impegnano
in alcun modo la responsabilità dell'Istituto. Nel citare i temi, non è, pertanto, corretto
attribuire le argomentazioni ivi espresse all'INVALSI o ai suoi Vertici*

Quaderni SNV – N. 2/2012 MAT

Introduzione	2
Cosa emerge in generale	3
Composizione delle prove.....	8
Composizione delle prove rispetto agli ambiti	9
Composizione delle prove rispetto ai macro-processi	9
Commenti e analisi dei risultati relativi agli ambiti.....	10
Commenti e analisi dei risultati relativi ai macro-processi.....	32
Conclusioni	38

Introduzione

Questo quaderno si propone di suggerire una lettura dei dati delle prove INVALSI di quinta primaria e di prima secondaria di primo grado, – rispettivamente chiamate SNV05 e SNV06 – al fine di evidenziare innanzitutto quali ostacoli cognitivi emergono e, di conseguenza, quali pratiche didattiche possano essere efficaci per aiutare gli alunni a superare tali ostacoli.

Il quaderno, che va ad aggiungersi agli altri strumenti, griglia di correzione¹ e guida alla lettura², già pubblicati, rispetta, nei principi e nella struttura, gli aspetti di continuità e verticalità del curriculum richiamati come necessità anche dalle *Indicazioni Nazionali* riviste del 2012 (http://www.istruzione.it/web/istruzione/prot5559_12).

Auspichiamo dunque che i lettori a cui si rivolge, principalmente insegnanti della scuola primaria e della scuola secondaria, abbiano la possibilità di riflettere, non solo su aspetti peculiari che emergeranno dalle analisi delle prove, ma anche su possibili modifiche da apportare alle metodologie didattiche.

Nella fascia di età che comprende le due prove in esame, gli alunni attraversano un periodo di trasformazioni, anche fisiologiche, una sorta di pre-adolescenza, che influisce sull'apprendimento fino a presentare talvolta anche delle regressioni, almeno apparenti.

Se a questo aggiungiamo le difficoltà, ma anche i grossi stimoli rappresentati dal cambiamento di ordine di scuola e di insegnanti, non è difficile capire quanto sia importante riflettere sui risultati che si ottengono dalle prove SNV05 e SNV06.

Nelle pagine che seguono è nostra intenzione fare appunto, alcune riflessioni che ci sono sembrate opportune alla luce dei risultati sul campione di studenti che è rappresentativo della popolazione di tutti gli alunni italiani di questi livelli scolastici.

I lettori si potranno avvalere anche degli altri quaderni che si riferiscono alle prove dei livelli SNV2-SNV5 e dei livelli SNV6-SNV8 del 2012 e che sono pubblicati sul sito INVALSI³.

Composizione delle prove

Le domande che compongono le prove del SNV sono costruite a partire da due dimensioni, così come descritto nel Quadro teorico di Riferimento (QdR) dell'INVALSI⁴:

- 1) *i contenuti matematici*: Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni;
- 2) *i processi* che gli studenti attivano quando rispondono ai quesiti.

I processi che possono essere valutati nelle prove INVALSI sono 8 e vengono qui riportati nella seguente tabella (Tabella 1):

¹ Griglia di correzione per la classe quinta,
http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/griglie/Griglia_MAT_05_SNV2012.pdf

Griglia di correzione per la classe prima secondaria I grado,
http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/griglie/Griglia_MAT_06_SNV2012.pdf

² Guida per la classe quinta,
<http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/guide/2012-5ELEM-GUIDA-MATEMATICA.pdf>

Guida per la classe prima secondaria I grado,
http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/guide/2012-1MED_GUIDA_MATEMATICA.pdf

³ <http://www.invalsi.it/snvpn2013/index.php?action=quadernisnv>

⁴ Il QdR può essere scaricato a questo indirizzo:
http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/ODR/QdR_Mat_I_ciclo.pdf

Tabella 1

Codice	Processi
1	Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (<i>oggetti matematici, proprietà, strutture...</i>).
2	Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (<i>in ambito aritmetico, geometrico...</i>)
3	Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (<i>verbale, numerica, simbolica, grafica, ...</i>).
4	Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico - (<i>individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo...</i>).
5	Riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (<i>saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, stimare una misura,...</i>).
6	Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (<i>congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, ...</i>).
7	Utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (<i>descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, ...</i>).
8	Riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (<i>riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...</i>).

Cosa emerge in generale

Per il livello SNV05, ossia per quanto riguarda la prova della quinta classe della scuola primaria, dall'analisi dei risultati sul campione si può riscontrare una sostanziale adeguatezza in termini di distribuzione delle difficoltà: su 44 item⁵, 22 hanno un indice di difficoltà negativo e 22 hanno un indice di difficoltà positivo.

Inoltre, rispetto allo scorso anno, la prova ha consentito di stimare con maggiore accuratezza i livelli moderatamente elevati della scala di abilità.

La difficoltà degli item viene determinata in seguito all'interpretazione dei risultati dopo il "pretest"; vengono infatti presi in considerazione alcuni indici statistici che consentono di determinare la difficoltà degli item in termini di risposte corrette, la correlazione tra i punteggi ottenuti dai rispondenti su un determinato item e il punteggio totale dei rispondenti su tutti gli item, il posizionamento delle domande in base alla loro difficoltà e le abilità dei rispondenti.⁶

⁵ Usiamo il termine inglese "item" per riferirsi ai quesiti che compongono le domande.

⁶ Per maggiori informazioni su questa analisi si rimanda all'articolo A.Mattei, A.Mastrogiovanni, *La costruzione delle prove INVALSI*, INDUZIONI, n.43, 2011, F.Serra Editore.

In generale, nella prova SNV05 del 2012 le performance degli alunni si sono rivelate più deboli per l'ambito *Relazioni e funzioni*. Questo dato può essere motivato dal fatto che nella pratica didattica si dedica meno attenzione a questo ambito rispetto ad altri, forse perché le attività che possono migliorare le abilità relative agli obiettivi previsti per questo settore di conoscenza sono poco diffuse e forse anche poco conosciute. Si tratta infatti di quelle attività relative all'osservazione di oggetti, alla loro classificazione, alla ricerca di legami che possono essere espressi con parole o simboli. Si tratta di interpretare il linguaggio matematico e metterlo in relazione col linguaggio naturale. Troppo spesso nella scuola primaria questo ambito è relegato a mera compilazione di schede: ciò non permette la concettualizzazione indispensabile all'apprendimento perché non si realizza una riflessione sulle esperienze vissute dagli alunni nella vita quotidiana.

Come si vede dai grafici riportati sotto, questa difficoltà è comune sia al livello SNV05 sia al livello SNV06.

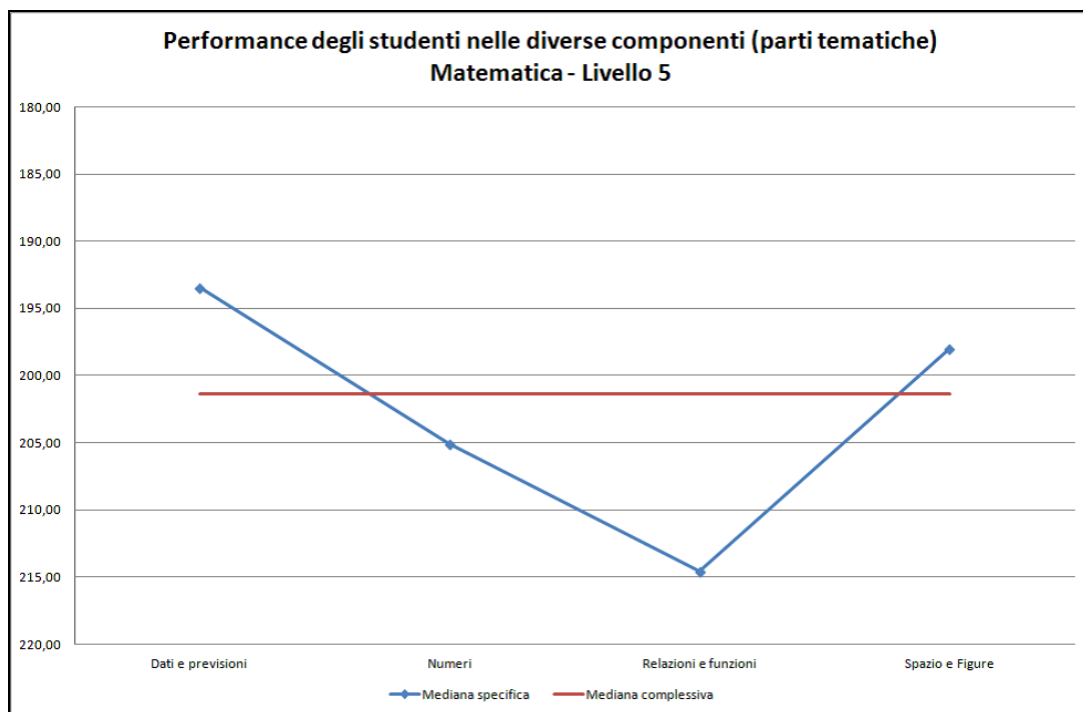


Figura 1

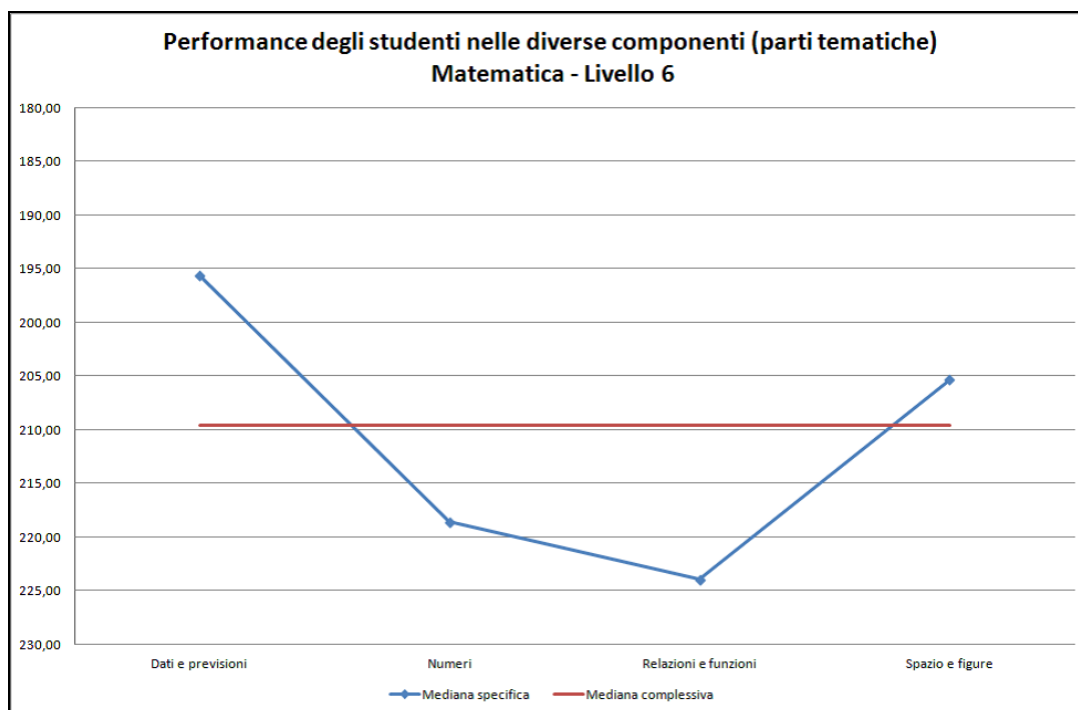


Figura 2

Altro tipo di considerazione può essere fatta sulla base di raggruppamenti di processi in *macroprocessi*. I *macroprocessi* sono stati individuati nel rapporto tecnico “Rilevazione nazionale degli apprendimenti 2012”⁷, aggregando gli otto processi del Quadro di Riferimento in quattro categorie più ampie.

I processi 1 e 2 del QdR risultano aggregati in *Concetti e Procedure*; i processi 3 e 8 in *Rappresentazioni*; i processi 4,5,7 in *Modellizzazione* ed infine il processo 6 che si denomina, in sintesi, *Argomentazione*.

⁷ Il Rapporto può essere scaricato a questo indirizzo:
http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/Rapporti/Rapporto_rilevazione_apprendimenti_2012.pdf

	PROCESSI	MACROPROCESSI
1	Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica	CONCETTI E PROCEDURE
2	Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure	CONCETTI E PROCEDURE
3	Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra	RAPPRESENTAZIONI
4	Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico	MODELLIZZAZIONE
5	Riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze	MODELLIZZAZIONE
6	Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico	ARGOMENTAZIONE
7	Utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale	MODELLIZZAZIONE
8	Riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione	RAPPRESENTAZIONI

Dai grafici appare che al livello SNV05, le prestazioni degli alunni sono piuttosto deboli rispetto a tutti i macroprocessi salvo quello delle *rappresentazioni*.

Per il livello SNV06 la situazione cambia un po', ma sempre la *modellizzazione* insieme all'*argomentazione* rimangono nodi deboli tra i macroprocessi.

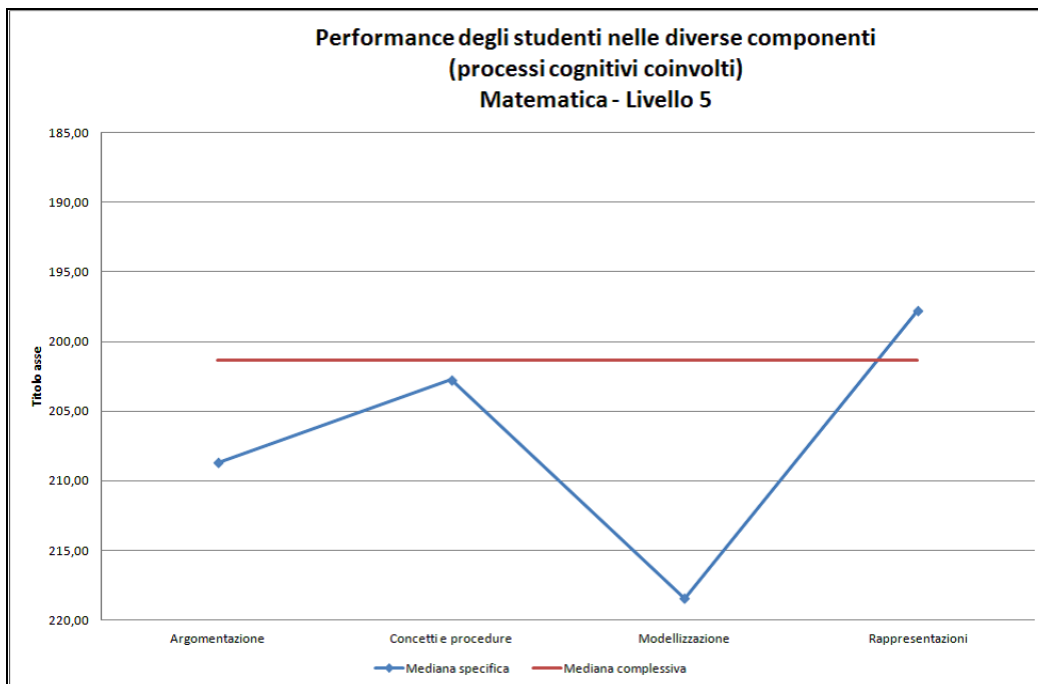


Figura 3

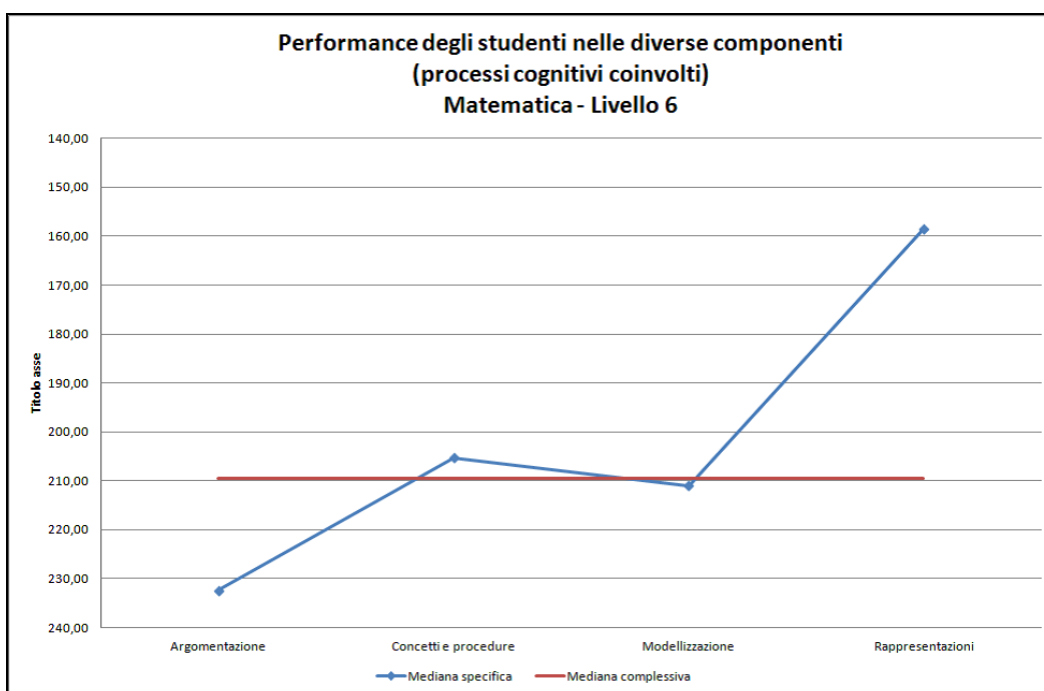


Figura 4

La prova rivolta alla prima classe della scuola secondaria di primo grado si caratterizza per la distribuzione dei quesiti lungo tutta la scala di difficoltà, con domande anche di difficoltà alta. Questa ampia distribuzione dei quesiti consente di rappresentare con precisione i livelli di

preparazione raggiunti da tutti gli allievi, sia quelli che hanno raggiunto traguardi formativi elevati, sia quelli che si trovano in condizioni di minore vantaggio.

Come espresso e approfondito nel *Rapporto Tecnico* (Invalsi 2012) ci sono diverse analisi statistiche che servono a misurare la solidità delle prove. Tra queste viene calcolato un indice di attendibilità, chiamato α di *Cronbach*. Questo indice, integrato con altri, permette di esprimere una valutazione sintetica e generale sulla coerenza complessiva della prova e quindi sull'attendibilità delle informazioni, che da essa si possono desumere. Per entrambe le prove, l'indice di attendibilità è superiore a 0,80 e dunque l'attendibilità risulta essere *molto buona* (precisamente 0,91 per il livello 5 e 0,89 per il livello 6)⁸.

Composizione delle prove

Presentiamo due tabelle che riassumono la composizione delle prove della classe quinta primaria (SNV05) e prima secondaria di primo grado (SNV06) sia rispetto agli ambiti sia rispetto ai macroprocessi.

Lo scopo di questa analisi sulla composizione delle prove è mostrare come ci sia sostanzialmente un buon equilibrio nella distribuzione delle domande⁹ e degli item e come le due prove possano essere confrontate dal punto di vista della verticalità. Questi due livelli (livello SNV05 e livello SNV06) vengono comunque testati, seppur molto vicini, e ci danno delle informazioni preziose sulla evoluzione delle capacità e sulla necessità di consolidamento di molte competenze.

Come già detto nell'Introduzione, queste indicazioni dovrebbero essere analizzate attentamente dai docenti dei due ordini di scuola perché nella didattica possano mettere in atto strategie adeguate a mandare avanti il processo di apprendimento, con attenzione agli ostacoli cognitivi e al recupero, ottimale per gli alunni, delle acquisizioni pregresse.

⁸ L'alfa di Cronbach può assumere valori da 0 a 1 e si considera una valutazione positiva se superiore a 0,80

⁹ Con il termine "domanda" si intende un testo, detto anche stimolo, seguito da uno o più quesiti (item).

Composizione delle prove rispetto agli ambiti

	Livello 5 V primaria	Livello 6 I secondaria I gr.
Numero	11 domande <i>(composte da 14 item)</i>	9 domande <i>(composte da 13 item)</i>
Spazio e figure	7 domande <i>(composte da 10 item)</i>	10 domande <i>(composte da 13 item)</i>
Dati e previsioni	8 domande <i>(composte da 9 item)</i>	5 domande <i>(composte da 10 item)</i>
Relazioni e funzioni	7 domande <i>(composte da 17 item)</i>	7 domande <i>(composte da 13 item)</i>
TOTALE	33 domande <i>(composte da 50 item)</i>	31 domande <i>(composte da 49 item)</i>

Composizione delle prove rispetto ai macro-processi

	Livello 5 V primaria	Livello 6 I secondaria I gr.
Concetti e procedure	19 item	14 item
Rappresentazioni	7 item	4 item
Modellizzazione	19 item	26 item
Argomentazione	5 item	5 item
TOTALE	50 item	49 item

Commenti e analisi dei risultati relativi agli ambiti

Le domande dell'ambito *Numeri* tendono ad accertare prevalentemente processi relativi a conoscere e utilizzare algoritmi e procedure o risolvere problemi.

Si possono riconoscere anche elementi di continuità con le prove dei livelli successivi, infatti ricorrono sovente quesiti che hanno come argomento questioni che rappresentano scogli cognitivi e che sappiamo necessitano di essere affrontate più volte nel percorso di insegnamento/apprendimento. La domanda D4, riportata nel seguito, appartenente alla prova SNV06, ad esempio, che richiede la conoscenza della scrittura polinomiale di un numero naturale e che, più in generale fa riferimento alla scrittura dei numeri e alla loro notazione in base 10, ha una domanda analoga (D3, riportata nel seguito) nella prova SNV05.

<p>D4. Quali delle seguenti scritture corrisponde al numero 1504?</p> <p>A. <input type="checkbox"/> $4 \times 1 + 5 \times 100 + 1 \times 1000$</p> <p>B. <input type="checkbox"/> $4 \times 1 + 5 \times 10 + 1 \times 100$</p> <p>C. <input type="checkbox"/> $4 \times 10 + 5 \times 100 + 1 \times 1000$</p> <p>D. <input type="checkbox"/> $4 \times 1000 + 5 \times 100 + 1 \times 10$</p>	<p>Risposta corretta: A</p> <p>RISULTATI DEL CAMPIONE</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>Non risponde</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>58,5</td> <td>10,8</td> <td>16,0</td> <td>9,8</td> <td>4,5</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	Non risponde	58,5	10,8	16,0	9,8	4,5
A	B	C	D	Non risponde							
58,5	10,8	16,0	9,8	4,5							

<p>D3. Quale delle seguenti espressioni rappresenta il numero 603 360?</p> <p>A. <input type="checkbox"/> $6 \times 10000 + 3 \times 1000 + 3 \times 100 + 6 \times 10$</p> <p>B. <input type="checkbox"/> $6 \times 10000 + 3 \times 1000 + 3 \times 100 + 6$</p> <p>C. <input type="checkbox"/> $6 \times 100000 + 3 \times 1000 + 3 \times 100 + 6$</p> <p>D. <input type="checkbox"/> $6 \times 100000 + 3 \times 1000 + 3 \times 100 + 6 \times 10$</p>	<p>Risposta corretta: D</p> <p>RISULTATI DEL CAMPIONE</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>Non risponde</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>10,9</td> <td>6,9</td> <td>10,2</td> <td>68,5</td> <td>0,1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	Non risponde	10,9	6,9	10,2	68,5	0,1
A	B	C	D	Non risponde							
10,9	6,9	10,2	68,5	0,1							

Nella prova SNV06, nonostante la domanda D4 fosse ritenuta abbastanza facile, vi è stato un risultato inferiore, il 58,5% di risposte corrette contro il 68,5% ottenuto nella domanda D3 della prova SNV05.

Come appare immediato, le unità nelle due domande sono poste una volta a destra e una volta a sinistra. Naturalmente la formulazione di questa ultima domanda richiama la routine sulla scomposizione dei numeri, così come usualmente viene fatta alla scuola primaria. Dobbiamo allora porre attenzione che certe attività non diventino troppo meccaniche, se vogliamo che l'idea venga riconosciuta anche cambiando la modalità di porre il quesito: chi ha capito concettualmente il significato della scrittura polinomiale del numero non dovrebbe essere tratto in inganno dallo scambio destra-sinistra.

Un'altra procedura assai importante riguarda l'ordinamento dei numeri naturali e ancora abbiamo a che fare con la domanda D6 nel livello SNV06 che ha una analoga, D7, nel livello SNV05. Il quesito D6, riportato sotto, richiede di confrontare numeri nella notazione decimale; anche questo è un nodo che provoca sempre qualche difficoltà ed è perciò ricorrente in più livelli di prove.

D6. Nella tabella sono registrati i risultati di una gara di salto in lungo ai campionati del mondo di atletica leggera del 2007.

Atleta (nazione)	Lunghezza del salto in metri
Beckford (JAM)	8,22
Saladino (PAN)	8,13
Reif (GER)	8,19
Mokoena (RSA)	8,28
Al-Sabee (KSA)	8,01
Howe (ITA)	8,17
Pate (USA)	8,10
Badji (SEN)	8,04

Osserva la tabella e rispondi alle domande.

a. Chi ha vinto la gara?

Risposta:

b. Qual è la differenza tra la lunghezza del salto di Pate e la lunghezza del salto di Al-Sabee?

- A. 0,9 cm
 B. 1,1 cm
 C. 9 cm
 D. 11 cm

c. Se l'atleta Howe avesse migliorato il suo salto di 1 dm, come si sarebbe classificato?

- A. Primo
 B. Secondo
 C. Terzo
 D. Quarto

Risposta corretta:

D6a: Mokoena o RSA o Mokoena (RSA)

D6b: C

D6c: B

RISULTATI DEL CAMPIONE

	errata	corretta	Non risponde
D6a	13,0	86,2	0,6

	A	B	C	D	Non risponde
D6b	63,3	2,9	30,1	2,9	,6
D6c	12,6	52,4	12,9	21,1	,9

Nella prova di quinta la domanda analoga D7 richiede di scegliere il numero che si avvicina di più a quello espresso a parole scegliendo tra quattro numeri in forma decimale.

D7. Fai una crocetta sul numero che si avvicina di più a quello scritto a parole:

a. un decimo

A. 10

B. 0,09

C. 0,01

D. 0,15

b. sette centesimi

A. 700

B. 6,07

C. 0,08

D. 7

Risposta corretta:
D7a: B
D7b: C

RISULTATI DEL CAMPIONE

	A	B	C	D	Non risponde
D7a	21,8	43,2	17,4	16,4	1,0
D7b	17,5	20,0	49,5	11,4	1,5

I risultati in questo caso sono 43,2% di risposte corrette per l'item *a.* e 49,5% per l'item *b.* In particolare, per il primo item, si può notare che la distribuzione di errore rispetto ai distrattori è pressoché uguale: le interferenze con il linguaggio naturale sono forti (per esempio decimo confuso con decina) che può fare ipotizzare una conoscenza del sistema posizionale ancora fragile. Inoltre il quesito richiede una particolare attenzione alla consegna, chiedendo non la semplice conversione di un numero dal linguaggio naturale alla rappresentazione posizionale, ma anche di trovare quale rappresentazione fornita sia un'approssimazione corretta di 0,1.

Per quanto riguarda la notazione posizionale delle cifre c'è anche la domanda D24 per gli alunni di quinta. Nonostante sia un argomento su cui si lavora fin dalle prime classi solo il 50,7% risponde correttamente.

D24. In quale numero la cifra 3 vale 300? Trova il numero e cerchiolo.

23 563	76,332
1 346,45	300 453
32,3	239
403,43	0,03

Risposta corretta: qualsiasi segno (cerchio, crocetta o sottolineatura) che identifichi il numero **1346,45**.

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
44,6	50,7	2,4

Un'altra domanda che è risultata molto difficile, per il livello SNV06, è la D23, anch'essa riguarda i numeri decimali e vi ha risposto correttamente solo il 10,8% di studenti.

D23. Quale delle seguenti operazioni dà il risultato più grande?

A. $10 \times 0,5$
 B. $10 \times 0,1$
 C. $10 : 0,5$
 D. $10 : 0,1$

Risposta corretta: D

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
71,2	4,9	10,0	10,8	2,2

Molti studenti, ancora nella prima classe della scuola secondaria di primo grado, pensano che la moltiplicazione sia un'operazione il cui risultato è sempre maggiore di ciascun fattore oppure che nella divisione maggiore è il divisore, minore è il quoziente. Questo quesito permette proprio di riflettere su queste convinzioni errate.

Siamo di fronte ad un ostacolo cognitivo sul quale è bene ritornare più volte in modo da consolidare le conoscenze e superare i momenti in cui i ragazzi sono portati a rifare un errore molto comune.

Una domanda da osservare attentamente per i risultati che ha dato, per il livello SNV06, è la D18. Infatti, apparentemente, si tratta di un argomento svolto comunemente nella maggior parte delle nostre classi.

D18. Osserva la seguente divisione:

144	:	36	=	4
Dividendo		Divisore		Quoziente

a. Cosa accade al quoziente se divido sia il dividendo sia il divisore per 2?

A. Il quoziente viene diviso per 2
 B. Il quoziente viene moltiplicato per 2
 C. Il quoziente viene diviso per 4
 D. Il quoziente non cambia

b. Moltiplica il divisore per 2. Qual è ora il quoziente?

Risposta:

Risposta corretta:
D18a: D
D18b: 2

RISULTATI DEL CAMPIONE

	A	B	C	D	Non risponde
D18a	21,3	15,9	9,3	47,4	5,7

	errata	corretta	Non risponde
D18b	47,1	39,8	12,7

L'item a. ottiene il 47,4% di risposte corrette con il 5,7% di omissioni e l'item b. ottiene il 39,8% di risposte corrette e le omissioni salgono al 12,7%.

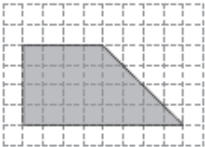
Se pensiamo al tempo che viene dedicato all'algoritmo della divisione attorno ai 9-10 anni e alle proprietà delle operazioni intorno agli 11 anni dobbiamo veramente soffermarci a riflettere sulla modalità con cui si affrontano queste procedure.

Forse sarebbe opportuno proporre un approccio meno algoritmico, ma contestualizzato in situazioni problematiche, sollecitando gli alunni a fare ipotesi, a indagarne il funzionamento prima in casi specifici e poi in generale. Nelle varie procedure si dovrà porre attenzione nel proporre diverse situazioni (fattori in cui compare la cifra 0, numeri decimali, ...), cercando di far emergere osservazioni che rispondano alla domanda: "Cosa succede se...".

Un altro ostacolo cognitivo assai arduo da superare si ha con il complesso concetto di frazione. Le consuete e ripetute routine didattiche (parti di una torta, piegature di un foglio, ...) non sempre permettono di affrontare in modo completo questo fondamentale argomento. Molte volte la frazione, soprattutto nella scuola primaria, è vissuta dagli allievi come un “banale” problema di rappresentazione di una parte del tutto e i ragazzi sembra non associno a questo concetto le attività tipiche del pensiero matematico quali il problematizzare e il mettere in atto strategie proprie di risoluzione.

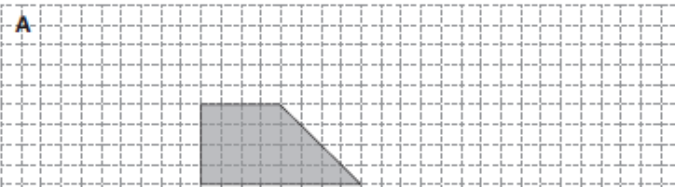
La domanda D20 (livello SNV06), ad esempio, rappresenta un quesito interessante perché, riferendosi a una figura non standard, richiede di trovare il tutto conoscendo una parte e non viceversa, come gli studenti sono generalmente abituati a fare.

D20. La figura che vedi di seguito corrisponde ai $\frac{3}{4}$ di una figura più grande.

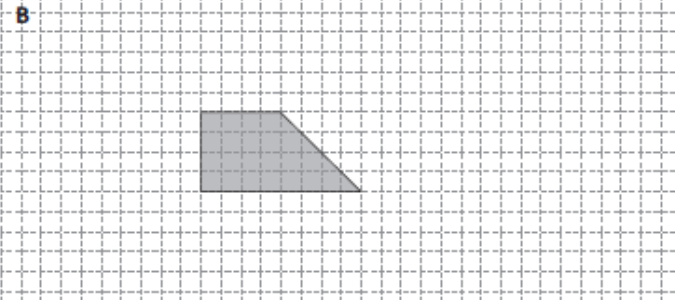


Disegna due delle figure, una nello spazio A e una nello spazio B, da cui la figura che vedi sopra può essere stata ritagliata.

A



B



Risposta corretta: Tutte le figure a cui lo studente ha aggiunto un quarto, purché inglobino la figura iniziale.

Un altro modo per risolvere il quesito consiste nel calcolare l’area della figura (24), dividere per 3 (che corrisponde a 8 quadretti) e aggiungere i quadretti alla figura iniziale.

RISULTATI DEL CAMPIONE		
errata	corretta	Non risponde
66,6	9,1	23,3

La soluzione non è unica. Per trovare la figura di partenza è possibile dividere in tre parti uguali il trapezoido in modi diversi e successivamente aggiungere una delle parti alla figura iniziale. Questa domanda è risultata particolarmente difficile, infatti, si sono avute il 66,6% di risposte errate e ben il 23,3% di omissioni.


La domanda è classificata nell’ambito *Numeri* perché l’oggetto prevalente di valutazione riguarda le frazioni e si tratta di mettere in atto il processo “conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure”, ma, come spesso accade a molti quesiti, per rispondere a questa domanda è

necessario possedere diverse abilità, ad esempio avere anche lavorato con la equiscomposizione di figure e avere una buona visione spaziale.

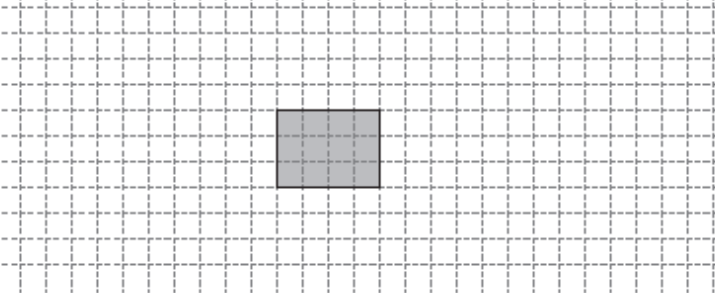
Riteniamo importante che gli insegnanti si soffermino a riflettere su quanto un quesito, spesso, sottintenda un lavoro complesso e variegato su aspetti diversi intrecciati nella disciplina matematica.

Anche in questo caso la domanda aveva una *sorella* in quinta, la D11 che richiedeva un procedimento analogo con una figura più semplice e con una frazione unitaria; pure in quel caso tuttavia il risultato non è stato incoraggiante infatti solo il 40,3% ha risposto correttamente e ben il 10,8% non ha risposto.

D11. Il rettangolo che vedi di seguito corrisponde a $\frac{1}{4}$ di una figura.



Disegna nello spazio qui sotto una delle possibili figure da cui il rettangolo è stato ritagliato.



Risposta corretta: è corretta qualsiasi figura che corrisponda ai $\frac{4}{4}$, della figura iniziale e che la inglobi.

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
48,3	40,3	10,8

Ancora in riferimento all'ambito *Numeri*, analizziamo due domande sulle espressioni (prova SNV06); anche questo è un argomento al quale usualmente si dedica tanto tempo del lavoro scolastico, spesso con molta attenzione sulla procedura di calcolo e con poca rilevanza sul significato. Sarebbe opportuno che si prestasse particolare cura, come richiamano le Indicazioni non solo ad “*eseguire semplici espressioni di calcolo con i numeri conosciuti, essendo consapevoli del significato delle parentesi e delle convenzioni sulla precedenza delle operazioni*”, ma anche a “*descrivere con una espressione numerica la sequenza di operazioni che fornisce la soluzione di un problema*”.¹⁰

La prima domanda che analizziamo è la D22.

¹⁰ Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, 4 Settembre 2012

<p>D22. Inserisci una sola coppia di parentesi nella seguente espressione in modo che il risultato sia 10.</p> <p style="text-align: center;">$2 + 3 \times 7 - 5^2$</p>	<p>Risposta corretta: $(2 + 3) \times 7 - 5^2$</p> <p>RISULTATI DEL CAMPIONE</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>errata</th> <th>corretta</th> <th>Non risponde</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>38,3</td> <td>48,6</td> <td>12,1</td> </tr> </tbody> </table>	errata	corretta	Non risponde	38,3	48,6	12,1
errata	corretta	Non risponde					
38,3	48,6	12,1					

La consegna chiede di mettere le parentesi in modo che venga un certo risultato (risposte corrette: 48,6%; omesse: 12,1%). Una possibile attività che si può fare in classe è trovare tutti i possibili risultati che si possono ottenere con questa espressione o inserendo due coppie di parentesi o togliendole del tutto.

L'altra domanda, D9, chiede quale dei problemi proposti è risolto dall'espressione data.

<p>D9. Osserva questa espressione: $3 \cdot 3 + 6 : 3$</p> <p>Quale dei seguenti problemi può essere risolto con l'espressione nel riquadro? Segna con una crocetta il problema.</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 25%; padding: 5px;"> <p>La mamma compra per ognuno dei suoi tre bambini un quaderno che costa tre euro. Compra anche sei euro di materiale vario per la scuola. Quanto spende in tutto per ogni bambino?</p> <p>Problema A <input type="checkbox"/></p> </td> <td style="width: 25%; padding: 5px;"> <p>Luigi compra per sé tre confezioni da tre matite ciascuna. Compra anche una confezione da 6 matite che divide con i suoi due fratelli. Quante matite ha in tutto Luigi?</p> <p>Problema B <input type="checkbox"/></p> </td> <td style="width: 25%; padding: 5px;"> <p>Tre amiche comprano ognuna tre caramelle e sei cioccolatini. Si dividono i dolci tra loro in parti uguali. Quanti dolci avrà ognuna di loro?</p> <p>Problema C <input type="checkbox"/></p> </td> <td style="width: 25%; padding: 5px;"> <p>Mario fa a piedi tre chilometri al giorno per tre giorni consecutivi; il giorno successivo fa sei chilometri. Quanti chilometri ha fatto in media al giorno?</p> <p>Problema D <input type="checkbox"/></p> </td> </tr> </table>	<p>La mamma compra per ognuno dei suoi tre bambini un quaderno che costa tre euro. Compra anche sei euro di materiale vario per la scuola. Quanto spende in tutto per ogni bambino?</p> <p>Problema A <input type="checkbox"/></p>	<p>Luigi compra per sé tre confezioni da tre matite ciascuna. Compra anche una confezione da 6 matite che divide con i suoi due fratelli. Quante matite ha in tutto Luigi?</p> <p>Problema B <input type="checkbox"/></p>	<p>Tre amiche comprano ognuna tre caramelle e sei cioccolatini. Si dividono i dolci tra loro in parti uguali. Quanti dolci avrà ognuna di loro?</p> <p>Problema C <input type="checkbox"/></p>	<p>Mario fa a piedi tre chilometri al giorno per tre giorni consecutivi; il giorno successivo fa sei chilometri. Quanti chilometri ha fatto in media al giorno?</p> <p>Problema D <input type="checkbox"/></p>	<p>Risposta corretta: Problema B</p> <p>RISULTATI DEL CAMPIONE</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>Non risponde</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>25,5</td> <td>28,4</td> <td>31,2</td> <td>12,6</td> <td>1,9</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	Non risponde	25,5	28,4	31,2	12,6	1,9
<p>La mamma compra per ognuno dei suoi tre bambini un quaderno che costa tre euro. Compra anche sei euro di materiale vario per la scuola. Quanto spende in tutto per ogni bambino?</p> <p>Problema A <input type="checkbox"/></p>	<p>Luigi compra per sé tre confezioni da tre matite ciascuna. Compra anche una confezione da 6 matite che divide con i suoi due fratelli. Quante matite ha in tutto Luigi?</p> <p>Problema B <input type="checkbox"/></p>	<p>Tre amiche comprano ognuna tre caramelle e sei cioccolatini. Si dividono i dolci tra loro in parti uguali. Quanti dolci avrà ognuna di loro?</p> <p>Problema C <input type="checkbox"/></p>	<p>Mario fa a piedi tre chilometri al giorno per tre giorni consecutivi; il giorno successivo fa sei chilometri. Quanti chilometri ha fatto in media al giorno?</p> <p>Problema D <input type="checkbox"/></p>												
A	B	C	D	Non risponde											
25,5	28,4	31,2	12,6	1,9											

Il quesito richiede il passaggio da un linguaggio simbolico ad uno verbale (risposte corrette: 28,4%). Una possibile attività in classe può consistere nel richiedere di trasformare ciascun problema delle opzioni A, C e D in espressione numerica per poi confrontarla con l'espressione della domanda.

Analogamente, per il livello SNV05 troviamo la domanda D29 dedicata al passaggio da situazione reale-numerica a risoluzione con scrittura simbolica.

D29. La signora Giulia prepara 3 crostate seguendo la ricetta che vedi qui sotto.

Dosi per una crostata

250 g di farina

200 g di zucchero

175 g di burro

300 g di marmellata

La signora Giulia usa 35 g di burro per ungere ognuna delle tre teglie in cui cuoce le crostate. Quale espressione permette di calcolare la quantità totale di burro usata dalla signora Giulia?

- A. $175 + 35 \times 3$
B. $175 \times 3 + 35$
C. $175 \times 3 + 35 \times 3$
D. $(175 + 3) \times 35$

Risposta corretta: C

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
32,4	17,5	25,4	15,2	4,8

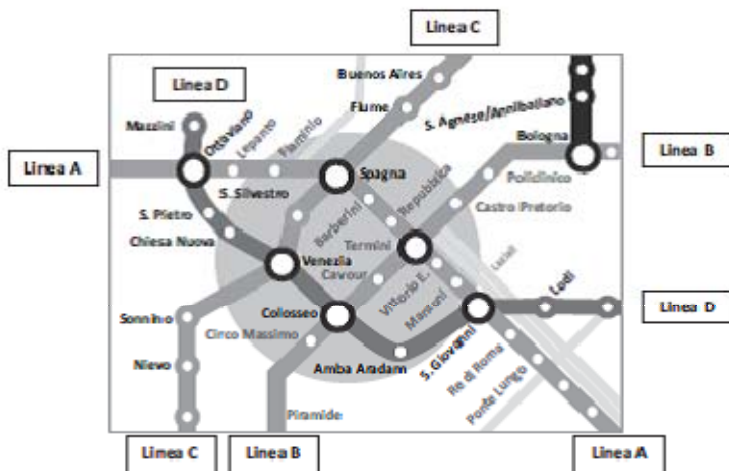
In questo caso solamente $\frac{1}{4}$ del campione risponde correttamente.

Le domande relative all'ambito *Spazio e figure* comprendono item che accertano prevalentemente la visione spaziale e l'acquisizione di metodi del pensiero matematico. In questo ambito si accertano anche il sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e il saper utilizzare strumenti di misura.

La prima domanda della prova per il livello SNV06, che è risultata anche molto facile, riguarda la lettura di una mappa di metrò; questa richiesta rientra in quel genere di domande che presentano dei "problemi autentici" nei quali le conoscenze e le abilità matematiche vengono impiegate per risolvere questioni problematiche della vita quotidiana. Spesso si pongono quesiti riferiti a situazioni tratte dalla realtà in ogni livello di prova, ad esempio anche nella prova di quinta primaria troviamo la lettura con relativa interpretazione dell'orario di treni.

Nella domanda sulla mappa della metropolitana si chiede prima di individuare due linee che passano dalla stessa fermata e poi di tracciare il percorso più breve per andare da una fermata ad un'altra.

D1. La cartina seguente rappresenta una parte del percorso delle 4 linee della metropolitana (Linea A, Linea B, Linea C e Linea D) di una grande città.



- a. Quali linee della metropolitana si incontrano alla fermata S. Giovanni?
- A. Linea A e Linea B
- B. Linea A e Linea D
- C. Linea C e Linea D
- D. Linea B e Linea D
- b. Giovanni sale alla fermata Bologna e vuole scendere alla fermata Venezia. Traccia con la penna sulla cartina il percorso con meno fermate per andare in metropolitana dalla fermata Bologna alla fermata Venezia.

Risposta corretta:

D1a: B

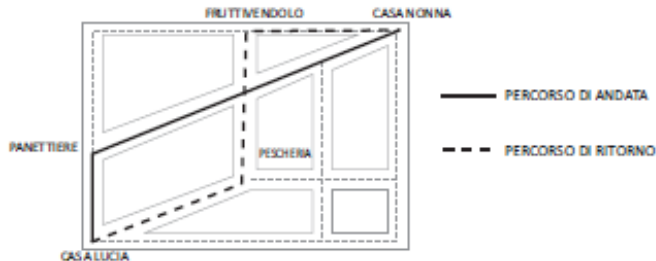
D1b: disegno/traccia sulla mappa da Bologna a Venezia (per Colosseo)

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
3,9	90,8	1,5	3,3	0,3
errata		corretta		Non risponde
14,8		78,9		6,1

Altra domanda che fa riferimento ad una mappa è la D7 dove però la mappa in questione è schematizzata e dovrebbe richiamare le proprietà delle figure geometriche e il carattere misurabile di oggetti e fenomeni. Il risultato è stato molto basso, solo il 12,8% risponde correttamente, forse anche a causa del contesto inconsueto in cui si richiede di applicare una conoscenza riguardante le proprietà dei triangoli.

D7. Lucia esce da casa sua, va a comprare il pane per la nonna e glielo porta a casa. Al ritorno, fa un'altra strada e si ferma prima dal fruttivendolo e poi in pescheria per fare alcuni acquisti per la mamma. Nella mappa in figura sono rappresentati i percorsi fatti da Lucia per andare e tornare da casa sua a casa della nonna.



Nel percorso di ritorno Lucia fa più strada rispetto all'andata? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

- Sì, perché
-
-
- No, perché
-
-

Risposta corretta:

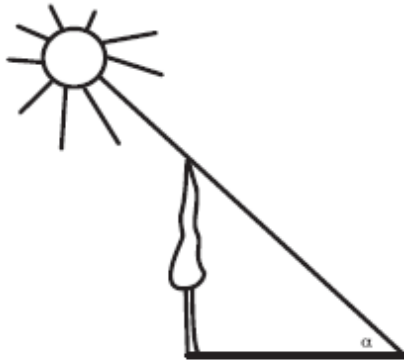
RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
81,9	12,8	4,3

Per rispondere correttamente a questa domanda si dovrebbe riconoscere il parallelogramma e il triangolo e far riferimento al fatto che al ritorno Lucia per un tratto percorre due lati di un triangolo invece di uno come all'andata, oppure far riferimento diretto alle misure dei due percorsi. La risposta corretta può essere data utilizzando diverse strategie per confrontare i due percorsi: si può utilizzare il righello e misurare il percorso dell'andata e quello del ritorno e vedere qual è il più lungo; oppure si può far riferimento alla proprietà dei triangoli per la quale ogni lato è minore della somma degli altri due. I due percorsi hanno, infatti, una parte uguale, quella che confina del parallelogramma e un'altra che nel percorso di andata corrisponde a un lato di un triangolo e nel percorso di ritorno corrisponde agli altri due lati dello stesso triangolo, la cui somma è sempre maggiore dell'altro lato. Le strategie diverse utilizzate per risolvere un problema possono essere confrontate e discusse durante l'attività in classe. Nelle nuove Indicazioni, tra i traguardi per lo sviluppo delle competenze si legge: *“Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.”*

Due domande di questo ambito *Spazio e figure* per il livello SNV06, che hanno creato particolare difficoltà sono la D14 con 24,1% di risposte corrette e la D15 con il 14,1% di risposte corrette. La prima delle due è riportata di seguito.

D14. La lunghezza dell'ombra di un albero varia durante il giorno a seconda dell'altezza del sole sull'orizzonte.



Quanto deve misurare l'angolo α affinché l'altezza dell'albero e la lunghezza della sua ombra diventino uguali?

Risposta:°

Risposta corretta: 45

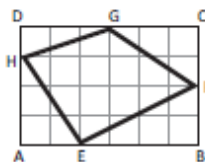
RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
65,2	24,1	10,5

La domanda implica il processo “Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico” ed ha come oggetto di valutazione gli angoli e la loro misura, può essere inquadrata in relazione all’obiettivo delle Indicazioni: “*conoscere definizioni e proprietà significative delle principali figure piane (triangoli, quadrilateri)*”. Si può riconoscere inoltre che l’argomento degli angoli e dei triangoli rettangoli isosceli è uno di quelli trattati a lungo quasi in tutte le nostre classi, allora c’è da domandarsi dove stia la difficoltà. Ancora una volta si chiede di applicare le conoscenze di geometria ad una situazione che modella, descrivendolo in forma schematica, un fenomeno naturale. La difficoltà si potrebbe ipotizzare nel riconoscere figure e loro caratteristiche anche in uno schema che non sia prettamente una figura geometrica data, ma la rappresentazione di un fenomeno.

La Domanda D15 qui riprodotta rientra a pieno nell’obiettivo delle Indicazioni, calcolare l’area di semplici figure scomponendole in figure elementari, ad esempio triangoli e ci mostra come il concetto di area sia anch’esso uno scoglio che si ripresenta non appena ci si allontana dalla semplice applicazione di regole.

D15. In figura è rappresentato il quadrilatero EFGH i cui vertici sono sui lati del rettangolo ABCD. Le dimensioni del rettangolo sono 4 m e 6 m.



Quanto misura l’area del quadrilatero EFGH?

- A. 11 m²
- B. 11,5 m²
- C. 12 m²
- D. 12,5 m²

Risposta corretta: D

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
20,4	23,7	34,7	14,1	6,9

Una domanda simile a questa, ma aperta, era stata data alla seconda superiore nella prova del 2011 ed aveva anche a quel livello creato difficoltà (solo il 29% circa di risposte corrette). Si trattava della domanda D18 qui sotto riportata.

D18. L'unità di misura riportata sugli assi cartesiani rappresenta 1 cm.

Calcola l'area del quadrilatero ABCD.

Risposta: cm²

Nella prova di quinta, livello SNV05, relativamente allo stesso argomento, è presente la domanda D14 che è risultata abbastanza facile, ottenendo il 66,5% di risposte corrette.

D14. Osserva le seguenti figure.

Quale di queste affermazioni è vera?

A. Le figure 1, 3, 4 hanno la stessa area

B. Le figure 3 e 4 hanno la stessa area e lo stesso perimetro

C. Le figure 2, 3, 4 hanno lo stesso perimetro

D. Tutte le figure hanno lo stesso perimetro

Risposta corretta: B

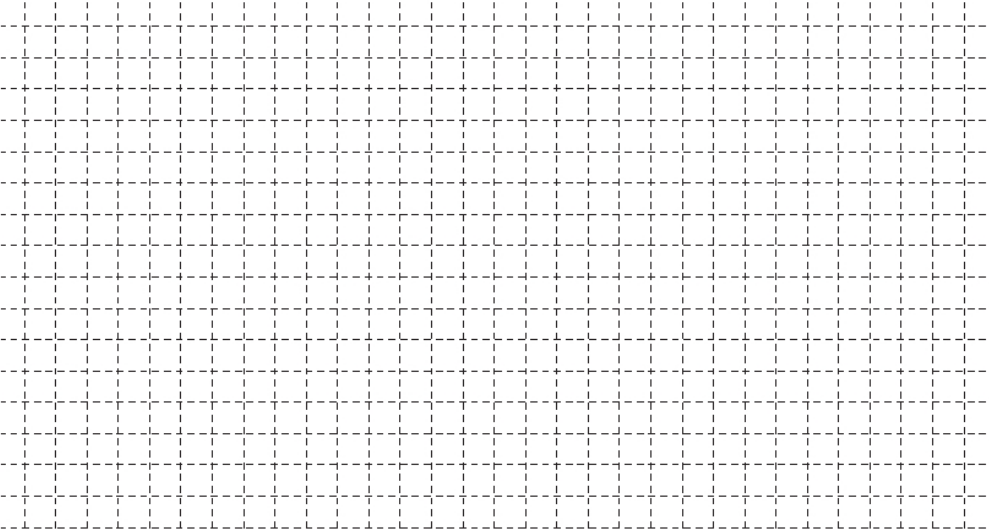
RISULTATI DEL CAMPIONE				
A	B	C	D	Non risponde
4,2	66,5	23,0	2,9	1,1

Si richiedeva di conoscere area e perimetro di poligoni distinguendo i due concetti adeguatamente. In questo quesito l'individuazione dell'area e del perimetro si ottiene per conteggio, questo facilita l'utilizzo della strategia della scomposizione di figure.

Interessante l'analisi dei risultati della domanda D16 per il livello SNV05, sempre proposto su sfondo quadrettato.

D16. Disegna con il righello, nello spazio quadrettato sotto, una figura geometrica che ha tutte queste caratteristiche:

- ha quattro lati
- i lati hanno la stessa misura
- gli angoli non sono tutti uguali

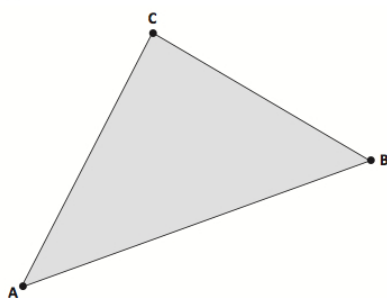


Meno della metà del campione (il 48,8%) disegna correttamente un rombo che non abbia gli angoli tutti uguali e che, dunque, non sia un quadrato. Il 4,6% degli alunni non risponde. Tra gli errori più comuni si trovano principalmente quadrati e parallelogrammi. Seppur nella scuola primaria sia prassi la rappresentazione di figure geometriche, risulta difficile per il campione disegnare un poligono che corrisponda a *più* vincoli concettuali (inoltre non sono presenti vincoli di misura). È una difficoltà che può essere ricondotta anche a un limitato lavoro sulla classificazione: i testi scolastici di scuola primaria propongono attività di classificazione limitatamente agli inizi della classe prima e finì a se stesse.

Una ulteriore difficoltà potrebbe derivare dal fatto che la consegna non sia esplicita o stereotipata (esempio: “disegna un rombo che abbia il lato di 4 cm”)

Analogamente, per il livello SNV06, la domanda D15 ha creato difficoltà, probabilmente dovute a misconcetti geometrici e stereotipi radicati.

D25. Osserva la figura.



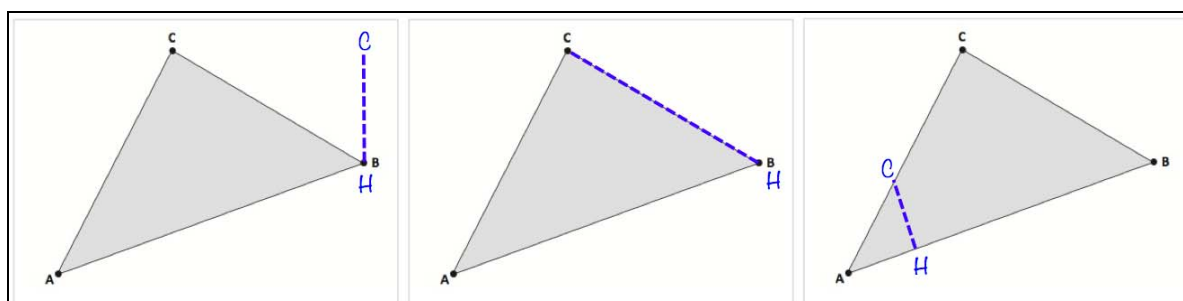
Disegna nel triangolo ABC l'altezza CH relativa al lato AB.

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
33,3	51,1	14,2

Nonostante la richiesta di disegnare l'altezza di un triangolo (definita nel macro-processo *concetti e procedure*) sia apparentemente facile per il livello SNV06, solamente poco più della metà del campione, il 51,1%, ha tracciato correttamente il segmento CH perpendicolare alla base AB (la risposta era ritenuta corretta con una tolleranza di $\pm 3\text{mm}$ rispetto al punto di perpendicolarità).

In generale gli errori sono dovuti al misconcetto che l'altezza debba essere necessariamente un segmento verticale. Nonostante nella consegna ci fosse l'esplicito riferimento all'altezza CH (dunque un segmento con estremo in C), in molti casi gli alunni hanno tentato di individuare un segmento verticale esterno, un segmento coincidente con un lato oppure altri errori nel tentativo di ricondursi a situazioni "già viste" come un triangolo rettangolo AHC (vedi figura sotto). Davvero significativa la percentuale di omissioni (14,2%).



Si può riflettere su come attività laboratoriali di costruzione, disegno, ritaglio, rotazione di figure geometriche possano essere significative per esplorare da diversi punti di vista le figure e abituare gli alunni a superare i concetti stereotipati. Non solo queste attività potrebbero essere utilizzate per alunni di questa fascia di età, ma anche con alunni più grandi generalmente più abituati a situazioni simboliche o formule non sempre interiorizzate.

Le domande relative all'ambito *Dati e previsioni* in generale sono quelle che hanno presentato per gli studenti il minor grado di difficoltà e la migliore *performance*, nonostante questo sia forse l'ambito meno approfondito nella prassi didattica. Probabilmente proprio per questo gli alunni affrontano con più attenzione le domande che afferiscono a quest'ambito, venendo meno la superficialità con cui a volte si misurano con argomenti ritenuti "facili" o "già saputi".

Le domande accertano, prevalentemente, il processo riguardante l'utilizzo della matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale.

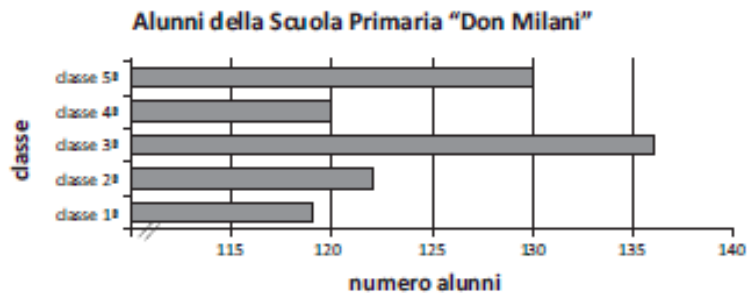
Per la prova SNV05, la domanda D6 richiede agli studenti di saper leggere una tabella desunta da una situazione reale relativa a misure di tempo e saper mantenere la correttezza del calcolo passando da ore a minuti. Non è richiesto un calcolo esplicito con le misure di tempo: in questo item si possono attivare diverse strategie di soluzione (per esempio aggiungere ore e minuti all'orario di partenza fino a raggiungere l'orario di arrivo).

Le risposte corrette sono state il 55,2%.

<p>D6. Luciana desidera trascorrere qualche giorno al mare a Rimini. Consulta l'orario dei treni e decide di prendere il treno che ci mette meno tempo.</p> <table border="1"> <tr> <td colspan="2">Stazione di partenza: Roma Termini</td> <td colspan="2">Stazione di arrivo: Rimini</td> </tr> <tr> <th></th> <th>Partenza</th> <th colspan="2">Arrivo</th> </tr> <tr> <td>1</td> <td>11:28 ROMA TERMINI</td> <td colspan="2">17:03 RIMINI</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>13:58 ROMA TERMINI</td> <td colspan="2">18:14 RIMINI</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>16:30 ROMA TERMINI</td> <td colspan="2">20:51 RIMINI</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>18:30 ROMA TERMINI</td> <td colspan="2">22:07 RIMINI</td> </tr> </table> <p>Quale treno prenderà Luciana?</p> <p>A. <input type="checkbox"/> Il treno 1</p> <p>B. <input type="checkbox"/> Il treno 2</p> <p>C. <input type="checkbox"/> Il treno 3</p> <p>D. <input type="checkbox"/> Il treno 4</p>		Stazione di partenza: Roma Termini		Stazione di arrivo: Rimini			Partenza	Arrivo		1	11:28 ROMA TERMINI	17:03 RIMINI		2	13:58 ROMA TERMINI	18:14 RIMINI		3	16:30 ROMA TERMINI	20:51 RIMINI		4	18:30 ROMA TERMINI	22:07 RIMINI		<p>Risposta corretta: D</p> <p>RISULTATI DEL CAMPIONE</p> <table border="1"> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>Non risponde</th> </tr> <tr> <td>17,7</td> <td>9,2</td> <td>17,2</td> <td>55,2</td> <td>0,6</td> </tr> </table>	A	B	C	D	Non risponde	17,7	9,2	17,2	55,2	0,6
Stazione di partenza: Roma Termini		Stazione di arrivo: Rimini																																		
	Partenza	Arrivo																																		
1	11:28 ROMA TERMINI	17:03 RIMINI																																		
2	13:58 ROMA TERMINI	18:14 RIMINI																																		
3	16:30 ROMA TERMINI	20:51 RIMINI																																		
4	18:30 ROMA TERMINI	22:07 RIMINI																																		
A	B	C	D	Non risponde																																
17,7	9,2	17,2	55,2	0,6																																

Sempre per il livello 5, il quesito D9 richiede un'attenta osservazione del grafico per ricavarne informazioni complete, senza lasciarsi condizionare o sviare dal dato percettivo.

D9. Il grafico rappresenta il numero di alunni per classe della scuola "Don Milani".



Giovanni, osservando il grafico, afferma che gli alunni della classe 5ª sono il doppio di quelli della classe 4ª.

Giovanni ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

- Sì, perché**
-
-
- No, perché**
-
-

A questo item risponde correttamente il 39,3% del campione. Il livello di accettabilità delle risposte era determinato sulla base di informazioni quantitative relative alle frequenze da analizzare (esempio: *No, perché 130 non è il doppio di 120*) oppure a fattori relativi alla costruzione del grafico (esempio: *No, perché il grafico non inizia da 0*).

Più volte, anche in seguito all'analisi di prove internazionali, viene messa in evidenza l'importanza di saper decodificare le informazioni grafiche per vagliare informazioni corrette anche su giornali, media, internet...¹¹

Per il livello SNV06 è interessante analizzare i risultati della domanda D2.

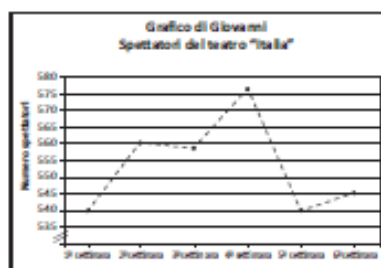
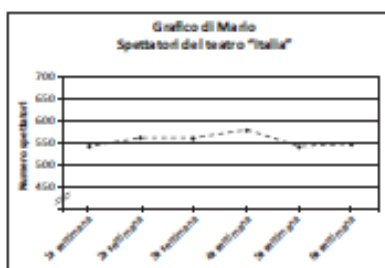
¹¹ A questo proposito si può consultare il *Rapporto Tecnico PISA 2009* (p.99) relativo al framework di matematica reperibile su http://www.invalsi.it/invalsi/ri/Pisa2009/documenti/RAPPORTO_PISA_2009.pdf

"I giovani in ogni Paese si trovano sempre più spesso a confrontarsi con una miriade di attività che coinvolgono concetti matematici, quantitativi, spaziali o probabilistici. Ad esempio, i media (giornali, riviste, televisione e Internet) sono pieni di informazioni sotto forma di tabelle, diagrammi e grafici su argomenti come il tempo, il cambiamento climatico, l'economia, la crescita della popolazione, la medicina e lo sport, per citarne alcuni. I cittadini sono inoltre di fronte alla necessità di leggere ed interpretare gli orari degli autobus e dei treni, portare a termine operazioni che coinvolgono il denaro, determinare il miglior prezzo sul mercato, e così via. La valutazione in matematica di PISA si concentra sulla capacità degli studenti di 15 anni [...] di utilizzare le loro conoscenze matematiche per affrontare queste questioni e trovare una soluzione ai problemi che ne derivano."

D2. Nella seguente tabella è riportato il numero degli spettatori del teatro "Italia" durante un periodo di 6 settimane.

Settimana	Spettatori
1ª Settimana	540
2ª Settimana	560
3ª Settimana	558
4ª Settimana	576
5ª Settimana	540
6ª Settimana	545

Per rappresentare questi dati Mario e Giovanni hanno costruito i due grafici seguenti.



a. Quale di queste affermazioni è corretta?

- A. Solo il grafico di Mario rappresenta correttamente i dati
- B. Solo il grafico di Giovanni rappresenta correttamente i dati
- C. Tutti e due i grafici rappresentano correttamente i dati
- D. Nessuno dei due grafici rappresenta correttamente i dati

b. Giustifica la tua risposta.

.....

.....

Mentre per l'item *a.* si ha una percentuale abbastanza alta di risposte corrette, il 50% (risposta C), per l'item *b.* il successo cala drasticamente, infatti solo il 30,5% risponde correttamente e ci sono ben il 10,3% di omissioni.

Anche in questo ambito, dove si sono ottenute le migliori *performance* si ha modo di verificare come la spiegazione del ragionamento fatto per scegliere una risposta sia comunque una richiesta alla quale i nostri studenti sono poco abituati.

Per il livello SNV06, ci sembra utile richiamare l'attenzione anche sulla domanda D5 perché questa si pone in controtendenza rispetto a quanto abbiamo detto sui buoni risultati all'interno dell'ambito Dati e previsioni, infatti, al primo item si ottiene il 53,9% di risposte esatte (Risposta C), ma all'item *b.* solo il 21,7% risponde correttamente (10km) e ben 9,3% non risponde. Anche l'item *c* risulta assai difficile il 25,5% risponde correttamente (6 km) e l'11,9% non risponde.

D5. Giulio è in vacanza in montagna a *Boscoverde*. Decide di fare una gita in bicicletta fino al vicino paese di *Pratofiorito*. Il seguente grafico mostra come varia l'altitudine lungo il percorso tra *Boscoverde* (km 0) e *Pratofiorito* (km 16).



a. Qual è la differenza di altitudine tra la quota massima e la quota minima raggiunte da Giulio durante il percorso da *Boscoverde* a *Pratofiorito*?

- A. 125 m
- B. 150 m
- C. 175 m
- D. 200 m

b. Quanti chilometri di strada in salita Giulio ha fatto da *Boscoverde* a *Pratofiorito*?

Risposta: km

c. Se al ritorno da *Pratofiorito* a *Boscoverde* Giulio percorre la stessa strada, quanti chilometri in salita deve fare?

Risposta: km

Il grafico riportato nello stimolo è complesso e la sua lettura non è immediata; infatti, è necessaria una buona interpretazione delle grandezze e del modo in cui sono rappresentate.

Una difficoltà sta nel leggere in modo corretto i numeri sull'asse x. Inoltre per rispondere al quesito dell'ultimo item lo studente deve capire che la salita del ritorno corrisponde alla discesa dell'andata. Oltre alla difficoltà del ragionamento inverso si aggiunge la difficoltà di tipo percettivo nella visualizzazione della immagine data: il grafico può interferire con la memoria del disegno di un paesaggio (montagne, etc.) e di conseguenza non risulta chiara la rappresentazione matematica.

Come spesso avviene, gli ambiti si intersecano nelle domande, anche se quello prevalente è quello di *Dati e previsioni* e in questo caso si richiede anche una buona capacità di interpretare una rappresentazione spaziale e una buona conoscenza delle grandezze in gioco.

L'ambito *Relazioni e funzioni* risulta essere un punto di debolezza sia per il livello SNV05 sia per il livello SNV06. Naturalmente si tratta di un ambito "intenso" nel quale molte conoscenze e competenze si intrecciano e i processi in gioco sono interconnessi. Proprio per questo motivo è fondamentale iniziare a lavorare con gli alunni nei primi anni della primaria con attività che prevedano la "dipendenza" di valori rispetto ad altri valori (esempio: le ricette, le sequenze numeriche, ecc...).

Analizziamo adesso alcune domande relativi a questo ambito.

Per il livello SNV05, le prestazioni degli alunni nella domanda D8 – riportata nel seguito – rimarcano il fatto che sia necessario concentrare l'attenzione anche su situazioni non standard come questa.

D8. La zia Elena va in pasticceria e compra una torta al cioccolato e una torta alla panna. Il prezzo totale delle due torte è di 24 euro. La torta al cioccolato costa 6 euro in più della torta alla panna.

a. Quanto costa la torta alla panna?

Risposta: euro

b. Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.

.....

All'item *a.* in cui dopo aver fatto una modellizzazione del problema proposto si deve fornire la soluzione (9 euro), ha risposto correttamente il 21,2% del campione. Dall'analisi di alcuni protocolli si è potuto osservare che gli alunni che hanno "pasticciato" il foglio con schizzi e altre rappresentazioni hanno saputo trovare una soluzione. A questo proposito si ribadisce l'importanza di insegnare a utilizzare le rappresentazioni; anche in letteratura (es. Duval, 1998)¹² sono riportati studi che ribadiscono l'importanza che avere a disposizione un maggior numero di rappresentazioni permette di cogliere più aspetti dell'oggetto matematico rappresentato. Nell'item *b.* si richiede di esplicitare (in forma narrativa o simbolica) la strategia risolutiva trovata e il 17,9% risponde correttamente.

Il quesito richiede di saper risolvere semplici situazioni problematiche (coinvolgendo i numeri sono interi e minori di trenta) mantenendo il controllo sia sui risultati che sui processi risolutivi.

Dall'analisi dei protocolli si evince che gli alunni abituati ad argomentare non si limitano ai calcoli, ma tendono a produrre un testo organizzato e strutturato (che diventa quasi un "canovaccio metacognitivo" del procedimento risolutivo seguito e dunque strumento davvero prezioso e potente per il controllo del risultato). Sono interessanti le diverse strategie risolutive.

¹² Duval Raymond - Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva? Editore: Pitagora, Collana: Bologna-Queretaro, Nr. 1 Edizione: 1998

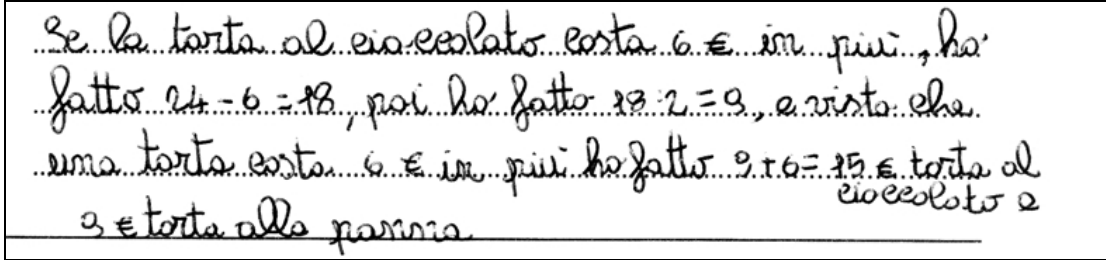
Protocollo n.1

Ho fatto $24:2=12$ euro che costerebbe ogni torta se valessero uguali. Dopo avere fatto questo calcolo ho aggiunto 3 euro alla torta al cioccolato ($12+3=15$) e ho sottratto 3 euro dalla torta alla panna ($12-3=9$). In questo modo ci sono 6 euro di differenza.

Protocollo n. 2

Bastava fare: $24-6=18$ (6 sono gli euro in più della torta al cioccolato), $18:2=9$ euro costo della torta alla panna (2 sono le torte).

Protocollo n. 3



Se la torta al cioccolato costa 6 € in più, ho fatto $24-6=18$, poi ho fatto $18:2=9$, e visto che una torta costa 6 € in più ho fatto $9+6=15$ € torta al cioccolato e 3 € torta alla panna.

In alcuni casi si è potuto osservare che gli alunni hanno proceduto per tentativi, senza esplicitarli (lavoro considerato incompleto); non è “sbagliato” ma denota una necessità di essere ancora “educati” alla comunicazione e all’argomentazione (a questo proposito risulta essere significativo il dato delle omissioni: 7,1%)

Protocollo n. 4

Fa 9 euro. Ho cercato 2 numeri che sommati potessero dare come risultato 24 euro.

L’errore più comune è stato quello di dividere 24 per due, per ottenere il prezzo della torta alla panna (12 euro) e poi aggiungere 6 per scoprire il prezzo della torta al cioccolato (18 euro). Il controllo dei risultati (incoerenti rispetto alla situazione originale perchè $18+12=30$ e non 24) avrebbe potuto contenere l’errore.

Una variante ulteriore a questo tipo di errore in cui ora la differenza tra le due torte è di 12 euro...

Protocollo n. 5

Se le due torte insieme costano 24, la metà è 12, solo che dato che quella al cioccolato costa 6 euro in più, costa 18 euro e la torta alla panna costa 6 euro.

Analogamente alcuni alunni hanno cercato la metà di 24 e successivamente hanno calcolato una sottrazione ($12-6$) per trovare il prezzo della torta alla panna (6 euro). Anche in questo caso il controllo sulla coerenza del risultato avrebbe potuto individuare l’errore. Spesso però gli alunni non sono abituati a rileggere il testo per controllare che la soluzione trovata soddisfi tutte le condizioni che il testo stesso pone.

Ci sono dei casi in cui la codifica corretta del testo e delle variabili ad esso associate ha indotto qualche alunno in errore. L’avvio del procedimento è corretto, l’alunno ha poi perso il controllo del testo (confusione torta panna/cioccolato).

Quanto costa la torta alla panna?

Risposta: 15 euro

Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.

PRIMA HO FATTO $24 - 6 = 18$ DAL ~~24~~ 18 HO FATTO LA META' 9 DOVE HO AGGIUNTO 6 SOLO ALLA TORTA ALLA PANNA XCHE' DICEVA CHE COSTAVA DI PIU' DI QUELLA AL CIOCC. E MI E' VENUTO 15

È opportuno puntare didatticamente sul senso del risultato rispetto al contesto e abituare gli alunni a valutare se il risultato ottenuto è coerente con i dati e le informazioni del problema.

Progettare percorsi didattici che prevedano l'utilizzo di situazioni problematiche in contesti "relazionali" tocca uno dei nodi fondamentali dell'apprendimento della matematica.

La capacità di mettere in relazione aspetti lessicali e aspetti funzionali era già un nodo debole emerso nella prova del 2009-2010 per il livello SNV05. Riportiamo la domanda D11, composta da due item, presente in tale prova.

D11. La somma degli anni di Anna e degli anni di Carlo è 57.

a. Se Carlo ha 7 anni più di Anna, quanti anni ha Anna?

A. 25

B. 28

C. 32

D. 50

b. Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.

Per quanto riguarda l'item *a.* il 40,1% del campione rispondeva correttamente (A.25) con una percentuale di omissioni del 4,3%. Nell'item *b.* in cui erano richiesti i calcoli o l'esplicitazione del percorso seguito a parole solo il 24,4% del campione ha dato una risposta soddisfacente e una percentuale del 10,3% ha omesso la risposta.

Queste riflessioni desunte dai dati “nel tempo” ci inducono a pensare che questo tipo di nodo didattico richiede ancora attività e approfondimenti.

Analogamente anche per la scuola secondaria di primo grado nell’anno 2012, l’item D16 (Relazioni e funzioni) è stato ostico per gli alunni.

D16. Elisa ha trovato lavoro in una città distante 50 km dal paese dove abita. Deve decidere tra due soluzioni:

– **Soluzione A:** trasferirsi nella città dove lavora pagando un affitto di 200 euro al mese;

– **Soluzione B:** andare e tornare ogni giorno in auto per 22 giorni al mese.
L’automobile di Elisa fa 10 chilometri con 1 euro di benzina.

Quale delle due soluzioni le fa spendere di meno? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

La soluzione A, perché

.....

.....

La soluzione B, perché

.....

.....

Per rispondere in modo corretto è necessario tener conto di tutti i dati disponibili. Infatti per calcolare quanto spende Elisa per la benzina è necessario considerare che i chilometri percorsi sono $50 \times 2 = 100$ in totale (alcuni studenti potrebbero considerare solo uno dei due percorsi, l’andata o il ritorno): la spesa per la benzina è di 10 euro al giorno e quindi per 22 giorni lavorativi sono 220 euro, cifra superiore alla spesa sostenuta da Elisa per l’affitto.

Solo il 16,5% degli alunni del campione risponde in maniera corretta e completa. Riportiamo sotto un protocollo.

Protocollo n.7

[La soluzione A perché...] spenderebbe solo 200 euro al mese. Invece con la soluzione B spende 220 euro perché ogni giorno deve fare 100 km e consuma 10 euro di benzina. Per i 22 giorni viene 10 euro di benzina $\times 22 = 220$ euro. 220 è maggiore di 200.

Il dato di risposte corrette così basso, è dovuto anche al fatto che la correzione è stata necessariamente rigorosa. Infatti non era sufficiente rispondere solo con l'operazione $10 \times 22 = 220$ poiché il 10 potrebbe essere ambivalente: 10 km (espresso nel testo) oppure 10 euro? Dunque il ragionamento dello studente non può essere "tracciato": infatti potrebbe essere esatto nella conclusione, ma errato nella costruzione.

Il 5,5% non tenta neppure la risposta.

Tra alcune risposte ci sono quelle considerate non complete. Tali protocolli meritano comunque un'analisi attenta, che spesso fa rilevare caratteristiche legate al buon senso e, più in generale, al pensiero narrativo. Ciò dimostra che nell'attività matematica è presente una componente narrativa che può sostenere l'apprendimento (la situazione reale permette l'immedesimazione) ma va educata al controllo del risultato e del processo.

Protocollo n. 8

[La soluzione A perché...] le fa spendere di meno e anche perché non fa avanti e indietro per 22 giorni!

Questo protocollo esemplificativo ci conferma la necessità di educare i ragazzi a tener conto di tutti i fattori in gioco, a costruire percorsi di risposta che prevedano più passaggi logici.

Commenti e analisi dei risultati relativi ai macro-processi

Per entrambi i livelli, SNV05 e SNV06, i due macro-processi che hanno evidenziato maggiori difficoltà sono *modellizzazione* e *argomentazione*. La *modellizzazione* riguarda i quesiti nei quali si chiede, principalmente, di risolvere problemi, di individuare una soluzione fra le diverse proposte, di "tradurre" in termini matematici una situazione, di interpretare un modello matematico. Il secondo macro-processo, l'*argomentazione*, si riferisce ai quesiti nei quali si richiede di giustificare o spiegare una soluzione o una scelta oppure di scegliere fra argomenti o enunciati diversi.

La ricerca didattica ha evidenziato che la *comunicazione in matematica*¹³ occupa un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento ed è supportata da diversi registri linguistici, scritti, orali, simbolici e perfino gestuali.

In generale le richieste argomentative sono un punto debole per gli allievi di tutti i livelli e il numero di omissioni, talvolta significativo, induce a riflettere sull'importanza di una pratica non sempre radicata nella didattica d'aula.

Ecco perché, fin dai primi anni della scuola primaria, è fondamentale prevedere attività di discussione, di interazione, di recupero dell'errore e di argomentazione scritta. Argomentare non è solamente rispondere a una domanda, ma mettere in campo una struttura comunicativa matematica fondata anche su connettivi, quantificatori, informazioni fondamentali, intrecci tra pensiero logico e narrativo.


¹³ Per un approfondimento si può consultare la documentazione relativa alla valutazione internazionale IEA-TIMSS reperibile sul sito INVALSI nella sezione dedicata alle indagini internazionali. L'importanza dell'argomentazione e della giustificazione è sottolineata anche nel *Quadro di Riferimento TIMSS 2011* scaricabile all'indirizzo [\[http://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2011/documenti/QdR_TIMSS_2011.zip\]](http://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2011/documenti/QdR_TIMSS_2011.zip)

La codifica delle argomentazioni da parte dell'insegnante è un'attività ricca di informazioni sui processi risolutivi degli alunni e sulle strutture irrinunciabili tipiche di una risposta argomentativa (che per sua natura può costituire un preludio alla dimostrazione). Proprio per il carattere creativo e aperto delle possibili risposte è difficile prevedere a priori un repertorio esaustivo di argomentazioni. Il margine di incertezza nell'attribuzione della correttezza si assottiglia solo con la pratica e con il confronto (per esempio in una sessione di correzione in équipe) e, nel tempo, con il miglioramento auspicabile delle pratiche argomentative degli allievi.


È senz'altro utile desumere alcune riflessioni più generali dai risultati nelle due prove in esame per avviare un supporto al miglioramento della didattica.

Prendiamo in considerazione, per la prova SNV05, la domanda D5 (*Spazio e Figure*).

D5. L'insegnante ha consegnato a Lucia e a Giada due fogli uguali di carta bianca rettangolari e due foto rettangolari uguali. Le due ragazze devono incollare le foto sul foglio bianco. Hanno eseguito il lavoro in questo modo:



Lavoro eseguito da Lucia



Lavoro eseguito da Giada

a. Chi ha lasciato più spazio bianco?

- A. Lucia
- B. Giada
- C. Lucia e Giada hanno lasciato lo stesso spazio bianco
- D. Non si può sapere perché non si conoscono le misure

b. Giustifica la tua risposta.

Nell'item *a.* relativo al macro-processo *concetti e procedure*, le risposte corrette sono state il 57,1%. (Risposta C)

Nell'item *b.* solo il 43% delle argomentazioni è risultato essere corretto. Ancora sensibile il dato relativo alle omissioni: 4,6%. L'argomentazione, per essere completa, deve fondarsi sull'equivalenza tra figure e non considerare solo l'aspetto percettivo: la giustificazione è considerata corretta se si fa riferimento al fatto che *sia* le immagini *sia* i fogli hanno la stessa

superficie o le stesse dimensioni. Ecco alcuni esempi di argomentazioni corrette, tratte da protocolli originali.

Protocollo n.9

*Lucia e Giada hanno lasciato lo stesso spazio bianco **perché** i fogli bianchi sono grandi uguali e **anche** le immagini **quindi**, in qualunque posto la metti, lo spazio è sempre lo stesso.*

Protocollo n.10

*Lucia ha incollato la foto vicino al bordo e Giada leggermente spostata **però** non cambia nulla **perché** le foto sono uguali e **anche** i rettangoli.*

In molti casi, invece, gli aspetti percettivi hanno indotto una risposta non corretta.

Protocollo n.11

Giada perché ha incollato la sua foto più al centro lasciando ovviamente più spazio

Protocollo n.12

Io dico Giada perché quando lo ha incollato sul foglio ha lasciato un po' di spazio, invece Lucia no!

Alcune argomentazioni sono da considerarsi non ancora complete. Ecco alcuni esempi.

Protocollo n.13

Lucia e Giada hanno lasciato lo stesso spazio bianco.

Protocollo n.14

Io nella foto di Giada ho calcolato le misure e mi venivano come in quella di Lucia.

Proprio perché un'argomentazione si differenzia da una semplice risposta è importante che siano esplicitate le caratteristiche fondamentali che rendono vera l'affermazione: nel primo caso viene solo trascritta la risposta, senza giustificazione. Nel secondo viene narrata una procedura implicita che non permette di ricostruire il processo.

In molti casi, gli alunni privilegiano un approccio procedurale, perdendosi nella deriva dei calcoli e delle misure commettendo errori. Ne è un esempio il protocollo riportato sotto.

b. Giustifica la tua risposta.

0 PERCHÉ GIADA HA LASCIATO 15,21 cm² DI SPAZIO E LUCIA HA LASCIATO 15,49 cm² DI SPAZIO

GIADA = $\begin{array}{r} 3,8 \times \\ 2,8 = \\ \hline 305 \\ 76+ \\ \hline 1065 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3,7 \times \\ 1 = \\ \hline 3,7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2,8 \times \\ 0,2 = \\ \hline 56 \\ 00+ \\ \hline 0,56 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3,1 \times \\ 0,1 = \\ \hline 31 \\ 00+ \\ \hline 0,31 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10,65+ \\ 3,7+ \\ \hline 0,56+ \\ 0,31 = \\ \hline 15,21 \text{ cm}^2 \end{array}$

LUCIA = $\begin{array}{r} 3,5 \times \\ 1,1 = \\ \hline 35 \\ 35+ \\ \hline 351 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3,85+ \\ 10,65 = \\ \hline 15,49 \text{ cm}^2 \end{array}$

MATOS

E' interessante anche notare come di fronte ad una domanda che chiede di valutare uno "spazio" molti studenti, automaticamente, si affidino agli strumenti di misurazione (come il righello), senza soffermarsi a leggere il testo (che in questo caso conteneva già la risposta corretta!). Per il livello SNV06, prendiamo ora in considerazione l'item D24 (*Spazio e figure*) nel quale viene richiesto di identificare l'affermazione corretta relativa alla possibilità di costruire figure piane familiari (triangolo e quadrato) che siano anche isoperimetriche.

D24. L'insegnante chiede ai suoi alunni: un triangolo equilatero e un quadrato possono avere lo stesso perimetro?

- Anna risponde: No. Infatti il triangolo ha tre lati e il quadrato ne ha quattro.
- Luigi risponde: No. Infatti un quadrato è sempre più grande di un triangolo.
- Ugo risponde: Sì. Quando succede i lati del triangolo sono più lunghi di quelli del quadrato.
- Fabiana risponde: Sì. Quando succede il lato del triangolo è uguale a quello del quadrato.

Chi ha ragione?

A. Anna

B. Luigi

C. Ugo

D. Fabiana

I risultati evidenziano che il 38,3% degli alunni individua correttamente a risposta C. Il 31% risponde A (si riferisce al numero dei lati che costituisce evidentemente una forte interferenza) e il 14,1% risponde B (riferendosi all'estensione della figura e dunque al concetto di area e non di perimetro). Il 13% risponde D basandosi sulla lunghezza dei lati.

Il quadrato e il triangolo equilatero sono figure familiari ai ragazzi, ma una riflessione sugli elementi geometrici, a volte, può evidenziare misconcetti nascosti. In questo caso infatti il quesito investiga la possibilità di costruire figure piane isoperimetriche. Siamo in un primo *step* rispetto alla competenza dell'argomentazione, ossia si richiede di riconoscere quale sia una argomentazione accettabile fra quelle proposte.

Molte attività laboratoriali si possono fare sull'isoperimetria di figure piane e di solito potendole realizzare con materiale povero o anche con percorsi disegnati in un piazzale o sul pavimento di una palestra. Tali attività hanno il pregio di riuscire a coinvolgere gli studenti oltre che di fornire dati esperienziali ai quali poi poter riferire concetti teorici non banali.

Questa capacità di *immaginare* situazioni geometriche orientate alla generalizzazione è fondamentale anche per risolvere quesiti orientati alle competenze di *rappresentazione*. I risultati in questo macro-processo sono generalmente positivi, in particolare per il livello SNV06.

Prendiamo ora in considerazione l'item D4 per il livello SNV05. Il quesito si fonda principalmente sulla capacità di modellizzare una situazione reale per individuare la soluzione e, successivamente, anche sulla competenza argomentativa.

D4. Mattia deve leggere entro la fine dell'anno scolastico un libro di 220 pagine. Quando mancano 2 settimane al termine dell'anno scolastico, si rende conto di essere arrivato esattamente a metà libro. Decide così di leggere 8 pagine al giorno per poter terminare il libro in tempo.

Riuscirà Mattia a terminare in tempo il libro? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

Sì, perché

.....

.....

No, perché

.....

.....

La domanda è articolata, richiede di mettere in atto diverse abilità per trovare la risposta: capacità di calcolo, confronto fra numeri, precisione nell' interpretazione dei dati. Lo studente deve spiegare in modo corretto che il numero di pagine che Mattia riesce a leggere sono *più della metà del libro*, oppure che per completare la lettura servono *meno di 14 giorni* oppure che è sufficiente leggere *meno di 8 pagine al giorno* per terminare il libro in tempo.

Il 38% degli alunni del campione risponde con un' argomentazione completa. Dai seguenti esempi si possono osservare stili comunicativi diversi in cui gli strumenti della matematica appresa sono utilizzati per modellizzare anche in maniera diversa.

Si, perché la metà del libro è 110 e quindi 2 settimane sono 14 giorni e lui legge 8 pagine al giorno allora $8 \times 14 = 112$ che è maggiore di 110.

Si, perché deve ancora leggere 110 pagine, ma in realtà potrebbe leggerne 112, quindi un giorno ne leggerà solo 6.

*Si, perché se legge 8 pagine in due settimane farà:
 $110 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 222$*

In alcuni casi, le argomentazioni risultano incomplete poiché manca la conclusione e non sono presenti indizi matematici che possano svelare il tipo di processo (esempio: "...ho calcolato..." senza esplicitare un possibile risultato e una rispettiva strategia.

Si, perché ho fatto la metà di 220 ed è 110 e poi ho calcolato quante pagine leggeva al giorno e alla fine lui era riuscito a finirlo.

C'è un vasto repertorio di argomentazioni non corrette in cui, per esempio, la risposta NO è indotta dalla scorretta interpretazione del resto nella divisione. In questo il caso lo studente sbaglia poiché non decodifica correttamente il resto (il quattordicesimo giorno legge solo 6 pagine e dunque completa il libro in tempo)

No, perché gli rimangono ancora 6 pagine da leggere, ho fatto $110:8 = 13$ resto 6.

Sebbene sia uno dei primi item del fascicolo (e dunque il "fattore stanchezza" non abbia ancora un peso determinante nella prestazione generale), la percentuale di omissioni è molto alta: 8,7%.

Conclusioni

Dall'analisi delle domande e dei risultati relativi al campione espressi in questo documento, possiamo evincere alcune considerazioni e alcuni suggerimenti per la didattica in classe, anche in accordo con i *Quadri di Riferimento* per la matematica e le nuove *Indicazioni 2012*.

Appare molto importante che entri nella prassi didattica la consuetudine a riflettere sulle attività che si fanno, in modo da poter esprimere verbalmente osservazioni e considerazioni, spiegazioni di procedure e ragionamenti. Per poter abituare gli alunni a riuscire sempre meglio nella verbalizzazione è opportuno che questa venga fatta in modo graduale a partire dall'inizio del percorso scolastico, in modo individuale e poi anche collettivo.

Con la discussione in classe ad esempio, si può richiedere di spiegare le proprie convinzioni e i procedimenti trovati interagendo con i compagni. L'interazione è fondamentale perché si affini la modalità di spiegare a parole; infatti la necessità di convincere altri che il proprio procedimento è corretto riesce a rendere sempre più esplicito il pensiero e sempre più precisa la verbalizzazione¹⁴.

Nelle *Indicazioni*, troviamo già, tra i traguardi della scuola dell'infanzia, "...sa argomentare, confrontarsi, sostenere le proprie ragioni...", tra gli obiettivi di Italiano della secondaria di primo grado per "*ascolto e parlato*", leggiamo "Argomentare la propria tesi su un tema affrontato nello studio e nel dialogo in classe con dati pertinenti e motivazioni valide".

Nella convinzione che le competenze linguistiche siano di fondamentale importanza nelle trasversalità disciplinari, riteniamo irrinunciabile che l'argomentazione occupi una posizione importante all'interno delle attività didattiche in matematica. In questa disciplina del resto, a questo livello di età, l'argomentare risulta essere una tappa fondamentale in preparazione della dimostrazione matematica.

Come espresso dalla *Commissione Italiana per l'insegnamento della Matematica*, e ripreso nelle *Indicazioni 2012*, le competenze argomentative si sviluppano altresì nelle attività laboratoriali infatti in matematica "... è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte..."¹⁵

In generale, possiamo concludere anche con la riflessione che il percorso di apprendimento della matematica è un processo lungo che necessita di un tipo di didattica elicoidale che consente di ritornare sui principali nodi cognitivi più volte. Le prove INVALSI, in particolare quelle del livello SNV05 e SNV06 ci consentono di individuare questi nodi delicati e di capire quanto sia necessario lavorarci tenendo conto della verticalità curricolare e della gradualità dei processi di apprendimento.

¹⁴ UMI, Matematica 2001, Materiali per un nuovo curriculum di Matematica, "La discussione matematica in classe"
<http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2001/matematica2001.html>
<http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2001/prima/discussione.pdf>

Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, MIUR, 4 Settembre 2012

¹⁵ Si può consultare il documento relativo al *laboratorio matematico* stilato dalla *Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (commissione permanente dell'Unione Matematica Italiana)* all'indirizzo web http://www.umi-ciim.it/documenti_ufficiali--89.html

A conferma dell'utilizzo delle prove INVALSI come strumento di riflessione didattica, che valorizza la continuità, possiamo riportare questo interessante passaggio dal *Rapporto Tecnico 2012* (p.10) "... è [anche] il caso di rilevare che, sebbene la logica di costruzione delle prove, dal punto di vista dello schema organizzativo sia la stessa per i diversi livelli scolari, fatte salve le differenze legate all'età degli alunni, le prove di seconda primaria e prima media rispetto alle altre tre, che mirano a rilevare i livelli raggiunti alla fine delle principali tappe del percorso scolastico (fine scuola primaria, fine primo ciclo, fine istruzione obbligatoria), hanno in qualche modo anche la funzione – oltre che di valutare le competenze raggiunte - di definire una linea di base a partire da cui sia possibile stabilire il progresso realizzato dagli studenti nel corso del successivo itinerario educativo".

Dunque le prove possono offrire la possibilità di "entrare dentro i risultati", di far emergere i punti di criticità o le risorse, di permettere spazi di autonomia e di confronto consapevole, di tracciare suggestioni e spunti veramente operativi per migliorare l'insegnamento.